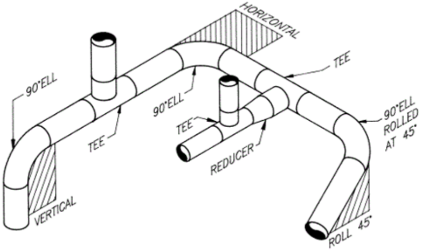
Solidi assialsimmetrici: tubi, serbatoi, dischi

Introduzione

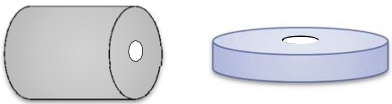
- Con il termine «solidi assialsimmetrici» intendiamo quei componenti riconducibili a solidi di rotazione (tubi, dischi, etc.)

- Obiettivo: determinazione dello stato di sforzo/deformazione conseguente all'applicazione di sollecitazioni (principalmente carico di pressione)

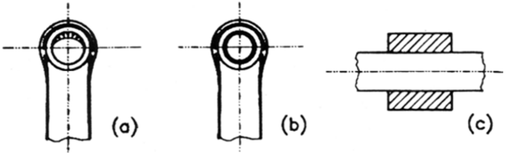
- Tubi spessi vs tubi a parete sottile: nei secondi lo spessore è trascurabile rispetto al raggio.



Tubi a parete spessa



- Corpo cilindrico cavo soggetto a pressione interna e/o esterna
- Geometria e sollecitazione assialsimmetrica
- Stato di sforzo bidimensionale o tridimensionale
- La trattazione che ne deriva è applicabile ad altri organi meccanici quali mozzi, dischi, serbatoi, etc.



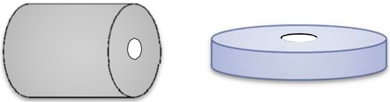
Tubi a parete spessa

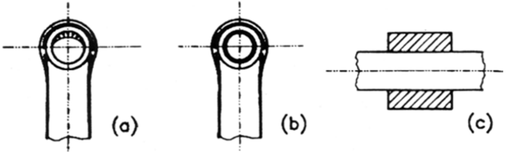
Testo di riferimento

V.I. Feodosev

Resistenza dei materiali

Editori Riuniti – University press



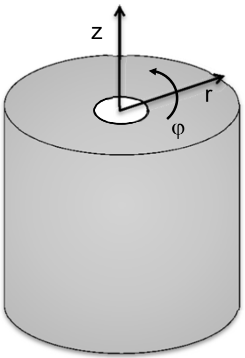


Tubi a parete spessa: deformazioni

Ipotesi:

- Tubo (forma cilindrica) a pareti spesse
- Simmetria assiale geometrica e di carichi
- Carico e sforzi costanti lungo l'asse del cilindro
- Materiale lineare elastico
- Piccoli spostamenti / piccole deformazioni

- Se ci sono spostamenti assiali sono tali che le sezioni trasversali del cilindro rimangono piane

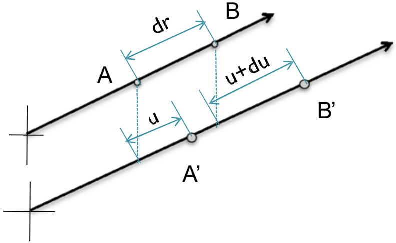


Sistema di riferimento in coordinate polari: (r, φ, z)

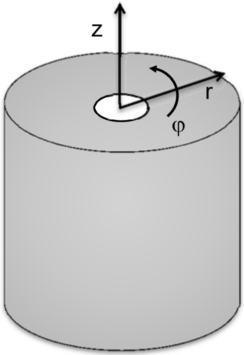
Tubi a parete spessa: deformazioni

Deformazione radiale ε_r:

- u=f(r) spostamento radiale

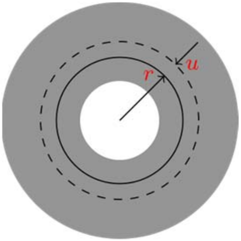


$$\varepsilon_r = \frac{(A'B' - AB)}{AB} = \frac{du}{dr}$$



Sistema di riferimento in coordinate polari: (r, φ, z)

Tubi a parete spessa: deformazioni



Deformazione circonferenziale ε_τ:

- u spostamento radiale

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

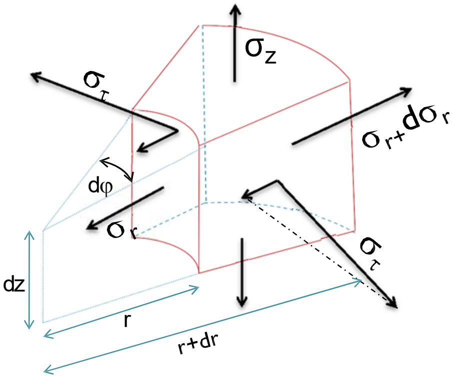
Deformazione assiale ε_z , se non nulla, ed indipendente da u (ed r)

Tubi a parete spessa: equilibrio delle forze

- Equilibrio in direzione radiale:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$$

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = 0$$



$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr dz d\varphi = 0$$

Tubi a parete spessa: espressione degli sforzi

Legge di Hooke generalizzata

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\right]$$

Assumendo di conoscere σ_z

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z$$

Tubi a parete spessa: problema di Lamé

Sostituendo nell'equazione d'equilibrio

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = 0$$

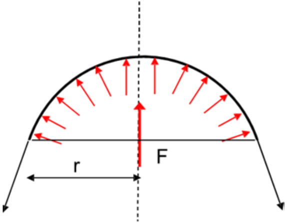
$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = 0$$

Risultante delle forze assiali uniformemente distribuite

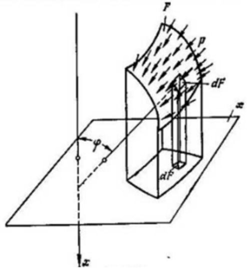
Si dimostra che la risultante assiale di forze uniformemente distribuite agenti su una superficie di forma qualsiasi è pari alla pressione moltiplicata per l'area proiettata della superficie sul piano ortogonale all'asse



Nella fattispecie se agisce la sola pressione interna p, la risultante assiale delle forze è $F = p\,\pi r^2$

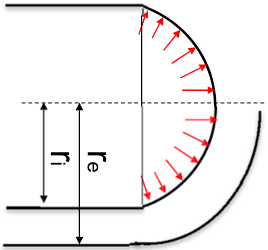
Dimostrazione

$$P_x = \int_F p \cos\varphi \, dF \qquad dF' = dF \cos\varphi \qquad P_x = p \int_F dF' = pF'$$



Determinazione dello sforzo assiale

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{p_i \pi r_i^2 - p_e \pi r_e^2}{\pi r_e^2 - \pi r_i^2} = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$



- Il numeratore è pari alla risultante delle forze assiali e il denominatore l'area della corona circolare;

- Il loro rapporto rappresenta lo sforzo assiale agente nel mantello cilindrico

Tubi a parete spessa: soluzione caso generale

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = 0$$ Problema di Lamé

Integrando una volta:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = C_1'$$

Integrando una seconda volta,

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Tubi a parete spessa: soluzione caso generale

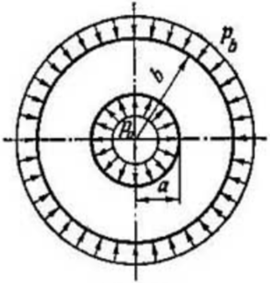
- Ricordando le definizioni delle tensioni:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}\right] + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z$$

$$\sigma_\tau = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}\right] + \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z$$

- Le costanti sono determinate dalle condizioni al contorno

$$r = a \Rightarrow \sigma_r = -p_a$$
$$r = b \Rightarrow \sigma_r = -p_b$$



Tubi a parete spessa: soluzione caso generale

- Sostituendo

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{a^2}\right]+\frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z=-p_a$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{b^2}\right]+\frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z=-p_b$$

- Da cui

$$C_1=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{1+\nu}\frac{p_a a^2-p_a b^2}{b^2-a^2}-\frac{\nu}{E}\sigma_z$$

$$C_2=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{1-\nu}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(p_a-p_b)$$

Tubi a parete spessa: soluzione caso generale

- In caso di forze di pressione in direzione assiale

$$u = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E}\sigma_z r$$

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}$$

Tubi a parete spessa: soluzione caso generale

- In caso di forze di pressione in direzione assiale

$$u = \frac{1-2\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}$$

- Senza forza assiale

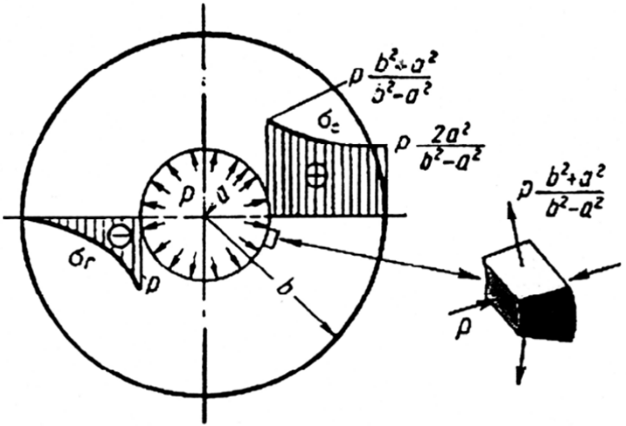
$$u = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}$$

Casi particolari: tubo soggetto a sola pressione interna

$$p_a = p$$

$$p_b = 0$$

$$\sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right)$$



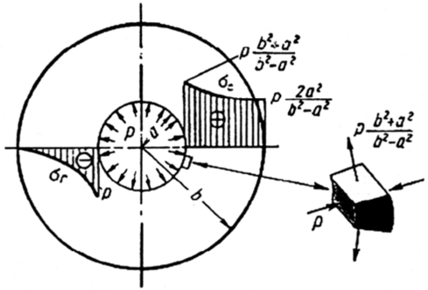
Casi particolari: tubo soggetto a sola pressione interna

Applicando il criterio di Tresca per i materiali duttili

$$\sigma_{eq}^{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\tau - \sigma_r$$

Nel caso di tubo internamente pressurizzato,

$$\sigma_{eq}^{Tr} = p\,\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p\,\frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$



Risultato: al raggio interno la **tensione equivalente** supera di due volte la pressione interna!

Questo rende difficile dimensionare i tubi oltre certe pressioni.

Tubo di piccoli spessori con pressione interna

$$\sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\tau(r=a)} = p\,\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{\tau(r=b)} = p\,\frac{2a^2}{b^2 - a^2}$$

$$b = a + \delta$$

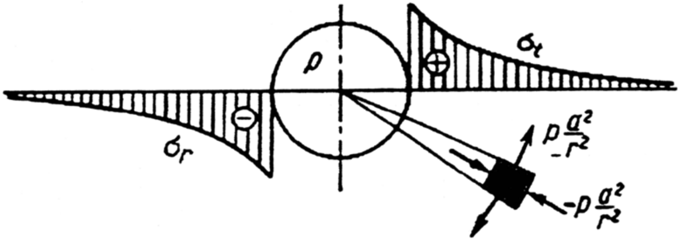
$$\sigma_{\tau(r=a)} = p\,\frac{(a+\delta)^2 + a^2}{(a+\delta)^2 - a^2} = p\,\frac{(a+\delta)^2 + a^2}{\delta(2a+\delta)}$$

$$\sigma_{\tau(r=b)} = p\,\frac{2a^2}{\delta(2a+\delta)}$$

$$\sigma_{\tau(r=a)} = \sigma_{\tau(r=b)} = p\,\frac{a}{\delta}$$

Tubo a spessore infinito

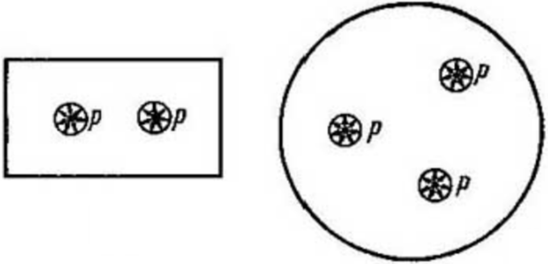
$$\sigma_{r,\tau} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right)$$



$$b \to \infty$$

$$\sigma_{r,\tau} = \mp p\frac{a^2}{r^2}$$

b/a> 4 può essere considerato
come avente spessore infinito



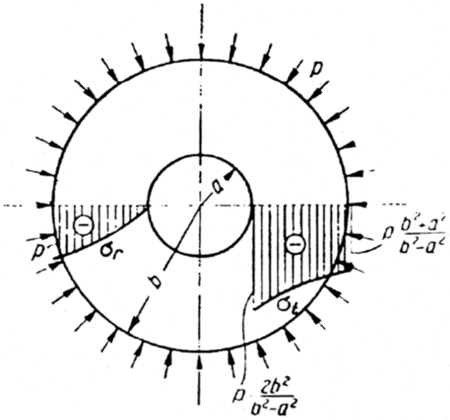
$$\sigma_{eq}^{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2p$$

Tubo pressurizzato esternamente

$$p_a = 0$$

$$p_b = p$$

$$\sigma_{r,\tau} = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right)$$



Componenti di sollecitazione entrambe di compressione

Senza componente assiale

$$\sigma_{eq}^{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_z - \sigma_t = 0 - \left(-p\frac{2b^2}{b^2 - a^2}\right) = p\frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

Soluzioni asintotiche

- **Cilindro pieno e pressione esterna**

  - $a = 0 \quad p_a = 0$
  - $b \neq 0 \quad p_b = p$

  - $\sigma_r = -p$
  - $\sigma_t = -p$

  Sforzi uniformi nel cilindro

- **Foro piccolo e pressione esterna**

  - $a \ll b \quad p_a = 0$
  - $b \neq 0 \quad p_e = p$

  - $\sigma_{r(r=a)} = 0$
  - $\sigma_{t(r=a)} = -2\mathrm{p}$

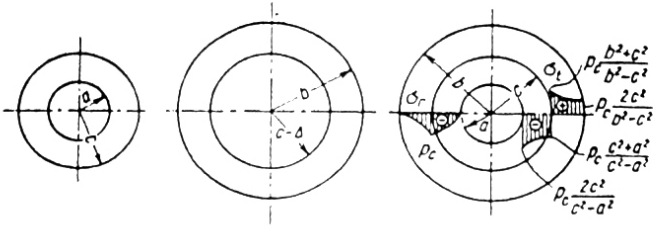
- **Raggio esterno grande e pressione interna**

  - $\mathrm{a} \neq 0 \quad p_a = p$
  - $b \rightarrow \infty \quad p_e = 0$

  - $\sigma_{r(r=a)} = -p$
  - $\sigma_{t(r=a)} = p$

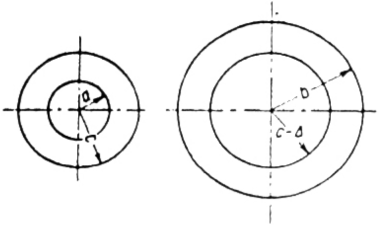
Tubi composti

- La soluzione tecnologica del tubo composto serve a **ridurre la tensione circonferenziale in corrispondenza della superficie interna del tubo pressurizzato** al fine di garantirne la resistenza a valori di pressione elevati non sopportabili con un semplice aumento dello spessore del mantello



- La pressione esterna viene realizzata sul tubo interno attraverso un'interferenza meccanica: il tubo esterno ha un diametro interno inferiore al diametro esterno del tubo interno
- L'interferenza viene temporaneamente annullata attraverso riscaldamento del tubo esterno (e/o raffreddamento di quello interno)

Tubi composti



Cilindro interno $r_i = a$

$r_e = c$

Cilindro esterno $r_i = c - \Delta$

$r_e = b$

Pressione di contatto p_k

Spostamento superfici di contatto

Cilindro interno $-u_1$

Cilindro esterno u_2

$$u_2 - u_1 = \Delta$$

Tubi composti

Spostamento senza forza assiale (caso generico)

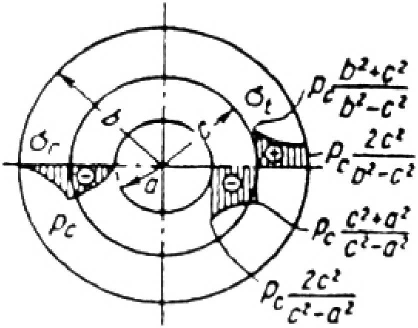
$$u = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{r_i^2 r_e^2}{r}\frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2}$$

Per cilindri dello stesso materiale

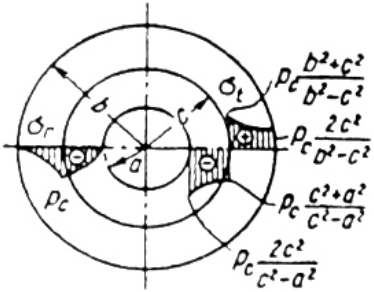
$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3}\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{b^2-a^2}$$

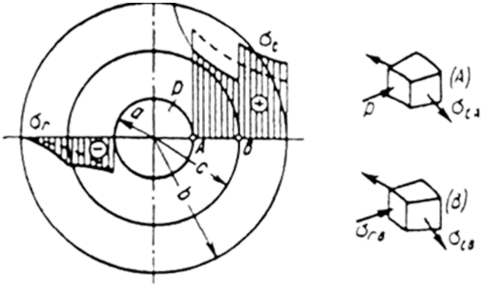
$$u_1 = -\frac{1-\nu}{E}\frac{c^3}{c^2-a^2}p_k - \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 c}{c^2-a^2}p_k$$

$$u_2 = \frac{1-\nu}{E}\frac{c^3}{b^2-c^2}p_k + \frac{1+\nu}{E}\frac{b^2 c}{b^2-c^2}p_k$$



Tubi composti: composizione delle tensioni





Condizione di uguale resistenza

$$\sigma_{eq\ A} = \sigma_{eq\ B}$$

Tubi composti: composizione delle tensioni

Composizione delle tensioni

$$\sigma_{r,\tau} = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \mp \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_{eq\ A} = \sigma_1 - \sigma_3 = p\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - (-p)$$

$$\sigma_{eq\ B} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) - (-p_k)$$

$$p\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} = p_k\left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}\right)$$

Tubi composti: composizione delle tensioni

Ricordando $$p_k = \frac{E\Delta}{2c^2}\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{b^2-a^2}$$

Condizioni di Gadolin

$$\Delta = \frac{2p}{E}\frac{cb^2(c^2-a^2)}{b^2(c^2-a^2)+c^2(b^2-c^2)}$$

condizione di uguale resistenza alla pressione di lavoro

$$\sigma_{eq} = p\frac{2b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{1}{\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2}}\right)$$

$$\sigma_{eq}^{min} = p\frac{b}{b-a}$$ per $$c = \sqrt{ab}$$

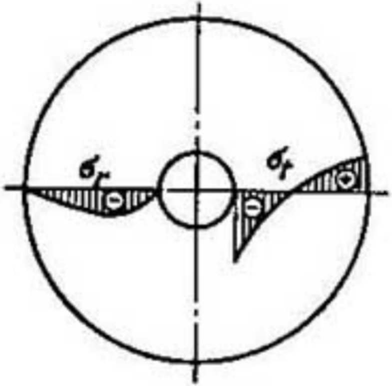
Tubi composti: confronto con tubo semplice

$$\sigma_{eq}^{min} = p\,\frac{b}{b-a}$$

$$\sigma_{eq} = p\,\frac{2b^2}{b^2-a^2}$$

$$\frac{\sigma_{eq}^{min}}{\sigma_{eq}} = \frac{b+a}{2b}$$

Tubi composti: autocerchiatura



Tubi composti: pressione di contatto

- Il principio dei cilindri composti può essere ripetuto più e più volte al fine di contenere pressioni molto elevate

- Es. Cannone «Schwerer Gustav» progettato nel 1930, peso 1334 ton., 47 m lungo, calibro 800 mm, lanciava proiettili dal peso di 7 ton. Con una gittata massima di 47 Km