

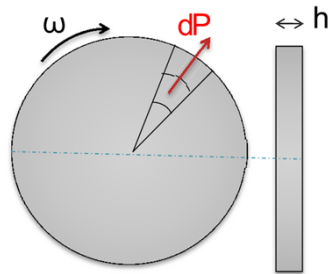
Solidi assialsimmetrici: tubi,  
serbatoi, dischi

## Dischi in rotazione

- Disco a spessore costante  $h$ , in rotazione con velocità angolare costante  $\omega$ .
- Sul generico elemento per effetto della rotazione agisce la forza centrifuga  $dP$ .
- La forza  $dP$  è pari al prodotto della massa dell'elemento per l'accelerazione centrifuga.

$$dP = dm\omega^2 r$$

$$dm = \rho dV = \frac{\gamma}{g} dV$$



## Dischi in rotazione: relazione di equilibrio

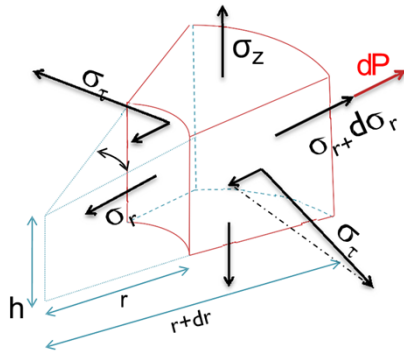
- In maniera analoga ai cilindri pressurizzati, riscriviamo l'equazione di equilibrio

$$dP = \frac{\gamma}{g} (h \cdot r \cdot d\phi \cdot dr) \omega^2 r$$

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2$$

- Per il legame elastico e ricordando la definizione delle deformazioni in funzione del solo spostamento radiale  $u$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = -\frac{(1-\nu^2)\gamma}{Eg} \omega^2 r$$



## Dischi in rotazione: relazione di equilibrio

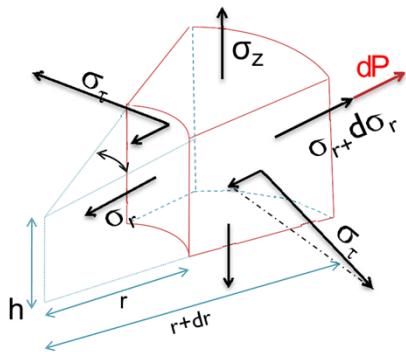
- Integrando due volte rispetto ad  $r$ ,

$$u = -\frac{(1-\nu^2)\gamma}{8Eg}\omega^2 r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

- Sostituendo nell'espressioni delle componenti di deformazione e poi nel legame costitutivo, otteniamo

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)r^2$$

$$\sigma_\tau = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (1+3\nu)r^2$$

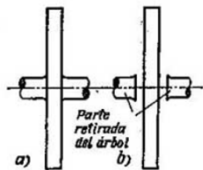


## Disco pieno

- In assenza di sollecitazioni esterne la tensione radiale al raggio esterno va a zero

$$\sigma_r(r=b) = 0$$

- Se l'albero e il disco formano un corpo unico il punto  $r = 0$  appartiene al disco

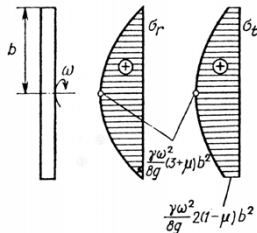


$$C_2 = 0$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [C_1(1+\nu)] - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)b^2 = 0$$

$$C_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} b^2 \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)(b^2 - r^2) \\ \sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu) \left( b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \end{array} \right.$$



Andamento  
parabolico  
Al centro le  
componenti sono  
uguali

## Disco forato

- In assenza di sollecitazioni esterne la tensione radiale al raggio esterno va a zero:

$$\sigma_{r(r=b)} = 0 \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{b^2} \right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)b^2 = 0$$

- In assenza di sollecitazioni interne la tensione radiale al raggio interno va a zero:

$$\sigma_{r(r=a)} = 0 \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{a^2} \right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (1+3\nu)a^2 = 0$$

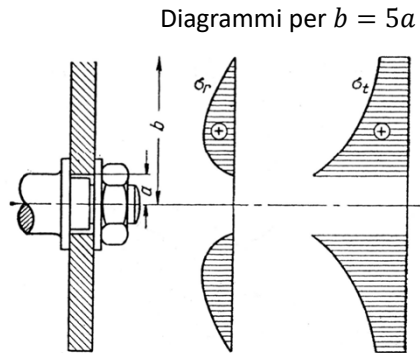
$$C_1(1+\nu) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)(b^2+a^2)$$

$$C_2(1-\nu) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3+\nu)a^2b^2$$

## Disco forato

- Stato di sforzo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_t = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{array} \right.$$



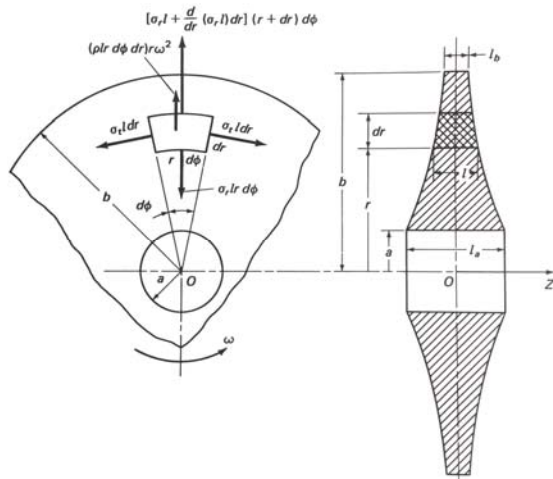
- Sforzi massimi sempre in prossimità della parte centrale del disco

## Disco a uniforme resistenza

- Riscriviamo l'equazione di equilibrio considerando che lo spessore del disco non sarà costante  $l = l(r)$

$$\begin{aligned}
 & -2\sigma_t l dr \frac{d\phi}{2} - \sigma_r l r d\phi \\
 & + \left[ \sigma_r l r d\phi + \sigma_r l dr d\phi + r \frac{d}{dr} (\sigma_r l) dr d\phi + \frac{d}{dr} (\sigma_r l) dr^2 d\phi \right] \\
 & + \frac{\gamma \omega^2}{g} l r^2 d\phi dr = 0
 \end{aligned}$$

$$-\sigma_t l + \sigma_r l + r \frac{d}{dr} (\sigma_r l) + \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 l = 0$$





## Disco a uniforme resistenza

- Imponiamo la condizione di uniforme resistenza:  
Si definisce disco di uniforme resistenza un disco in cui in ogni punto la tensione radiale è uguale alla tensione circonferenziale ed è costante

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_b$$

- Verifica della congruenza

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

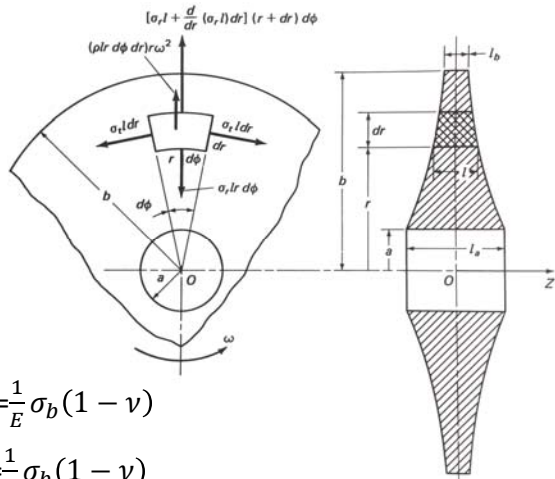
$$u = \varepsilon_t r$$

$$\varepsilon_r = \frac{d(\varepsilon_t r)}{dr}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t) = \frac{1}{E} \sigma_b (1 - \nu)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{1}{E} \sigma_b (1 - \nu)$$

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{E} \sigma_b (1 - \nu) \right] = \frac{1}{E} \sigma_b (1 - \nu)$$



## Disco a uniforme resistenza

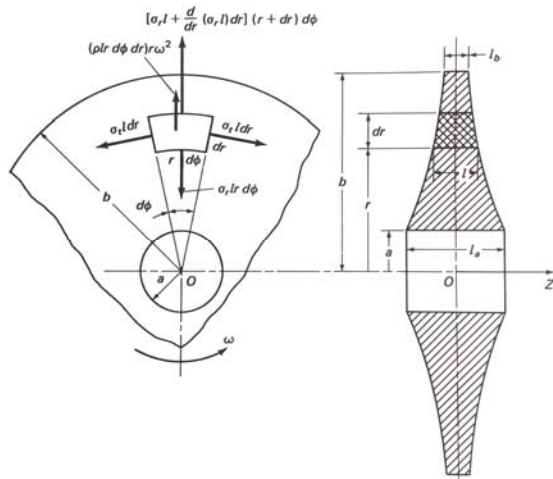
- Imponiamo la condizione di uniforme resistenza:  
Si definisce disco di uniforme resistenza un disco in cui in ogni punto la tensione radiale è uguale alla tensione circonferenziale ed è costante.

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_b$$

$$\sigma_b r \frac{dl}{dr} + \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 l = 0$$

$$\ln l = -\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_b} r^2 + \ln C$$

$$l = C e^{-\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_b} r^2}$$



## Disco a uniforme resistenza

- Condizione al contorno

$$l = l_b \quad \text{per} \quad r = b$$

$$C = l_b e^{\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_b} b^2}$$

$$l = l_b e^{\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_b} (b^2 - r^2)}$$

