VELOCITA' CRITICHE ALBERI

Gli assi e gli alberi, come sistemi elastici, sotto l'azione di forze variabili nel tempo devono essere analizzati dinamicamente

Il rischio da evitare è che con eccitazioni prossime alle risonanze le amplificazioni diano origine a sforzi e deformazioni non accettabili

Gli alberi devono essere progettati per evitare che funzionino alle:

"velocità di rotazione critiche"

Bisogna cioè fare in modo che l'albero abbia sufficiente rigidezza flessionale per avere la più bassa velocità critica al di sopra della velocità di rotazione dell'albero.

Le *frequenze proprie torsionali* dell'albero devono essere lontane dalla frequenza torsionale indotta.

LA VELOCITA' DI ROTAZIONE CRITICA HA, NUMERICAMENTE, LO STESSO VALORE DELLA PULSAZIONE PROPRIA DELLA VIBRAZIONE FLESSIONALE

Per sistemi elastici continui dotati di massa, inerzia e smorzamento il comportamento dinamico è rappresentabile da un sistema di equazioni differenziali.

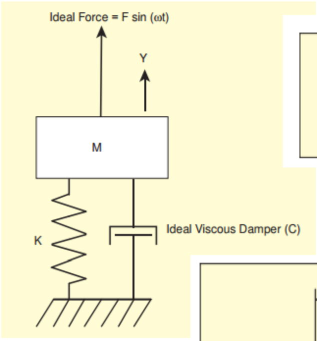
Tali equazioni integrate nel dominio del tempo permettono di rappresentare il comportamento dinamico

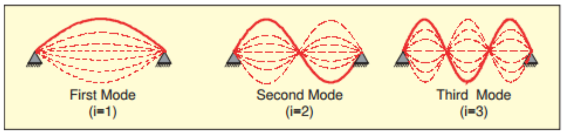
In generale, le prime frequenze proprie di vibrazione di ciascun tipo di comportamento si presentano in campi di frequenze ben distinti:

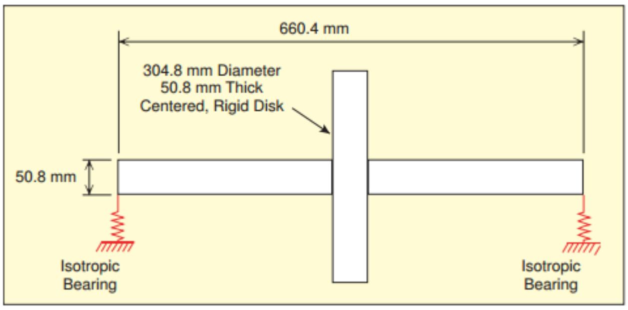
torsionali→basse frequenze
flessionali→frequenze intermedie
assiali→alte frequenze

Questo consente di semplificare grandemente il problema considerando un numero inferiore di variabili indipendenti.

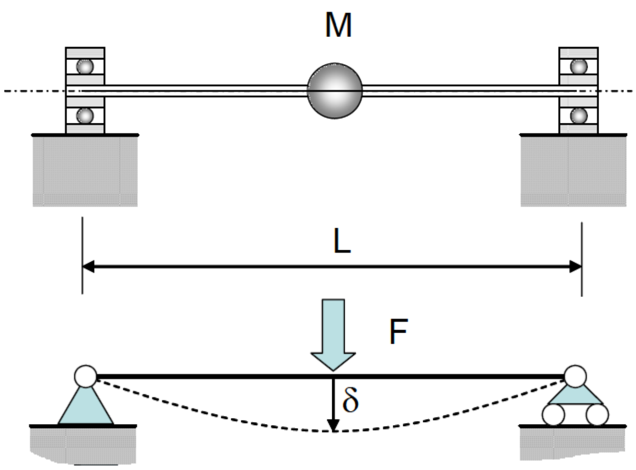
Velocità critiche alberi







Velocità critiche alberi



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

6

$$F = k\delta \qquad k = \frac{48EI}{L^3}$$

$$F_e = me\omega^2$$

Con e = eccentricità ed ω vel. angolare di rotazione dell'albero

Scomponendo per componenti e considerando il classico caso di trave 2D si trova l'equazione classica dell'oscillatore armonico ad un grado di libertà con smorzamento trascurabile:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = me\omega^2\cos(\omega t)$$

Con x(t) = spostamento in direzione x dalla massa in funzione del tempo.

Con l'ipotesi che il moto della massa sia pari ad una oscillazione armonica uguale a quella della forzante:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Da cui si ricava:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

Che sostituita nell'equazione dell'oscillatore armonico diviene:

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t) + kA\cos(\omega t) = me\omega^2\cos(\omega t)$$

$$A\left(k - m\omega^2\right) = me\omega^2$$

Si ottiene quindi: $$A = \frac{me\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)}$$

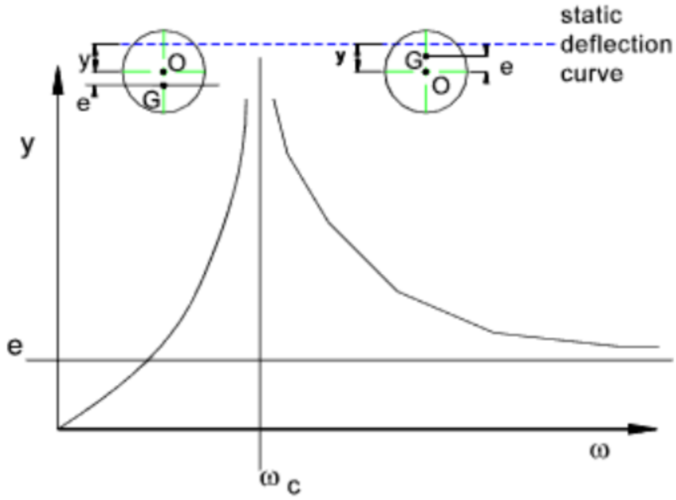
Semplificando e ricordando che $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ si ottiene:

$$A(\omega) = \frac{\omega^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)}$$

Ovviamente la soluzione dipende dalla geometria considerata.

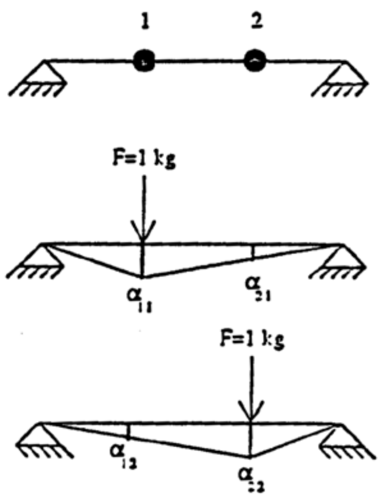
Se sono presenti più masse la soluzione è più complicata

Velocità critiche alberi



11

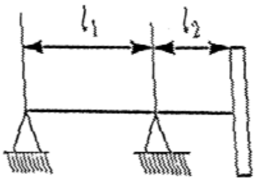
Velocità critiche alberi



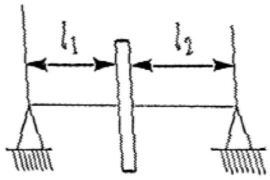
12

Velocità critiche alberi

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{m(l_1+l_2)l_2^2}}$$

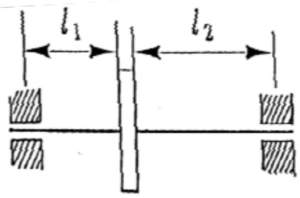


$$\omega = \sqrt{\frac{3EI(l_1+l_2)}{ml_1^2 l_2^2}}$$

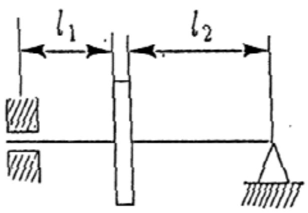


Velocità critiche alberi

$$\omega = \sqrt{\frac{12EI(l_1+l_2)^3}{ml_1^3 l_2^2(3l_1+4l_2)}}$$



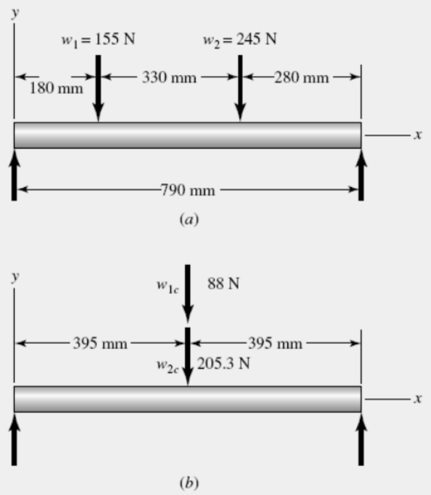
$$\omega = \sqrt{\frac{3EI(l_1+l_2)^3}{ml_1^3 l_2^3}}$$



Velocità critiche alberi (Shigley)

Figura 7-12

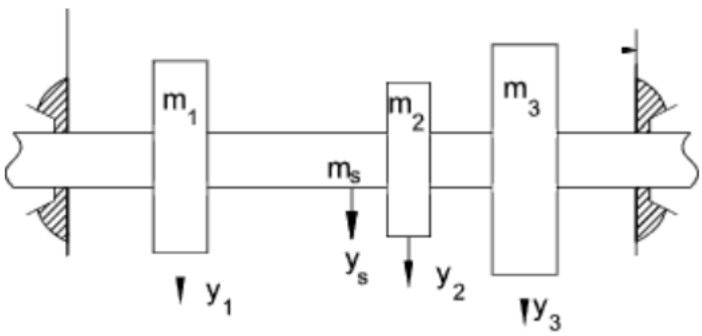
(*a*) Albero di diametro costante di 25 mm per l'Esempio 7-3.
(*b*) Sovrapposizione degli effetti per i carichi equivalenti agenti nella mezzeria dell'albero, con lo scopo di determinare la prima velocità critica.



15

Velocità critiche alberi

$$\frac{1}{N_c^2} = \frac{1}{N_s^2} + \frac{1}{N_1^2} + \frac{1}{N_2^2} + \ldots\ldots$$



16

Velocità critiche alberi

17

Velocità critiche alberi

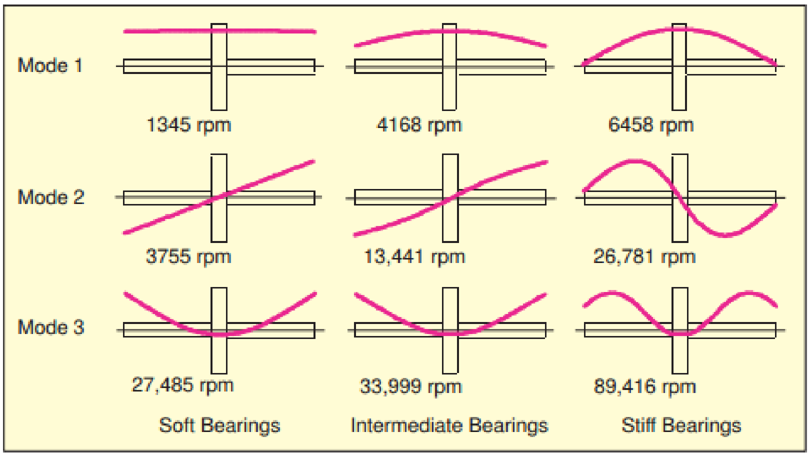


Figure 7. Mode shapes versus bearing stiffness, shaft not rotating.

18

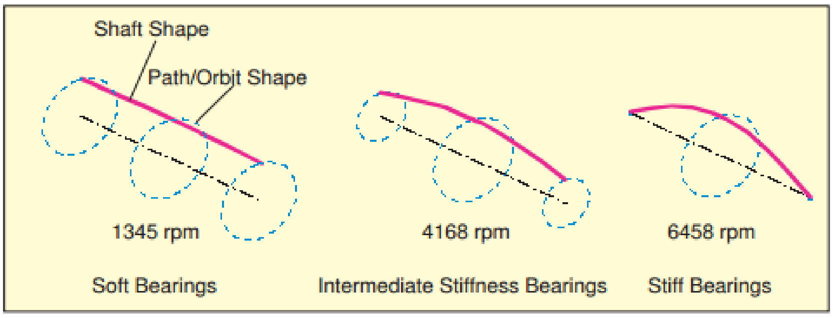


Figure 8. Shaft rotating at 10 rpm, 1st mode shapes and frequencies in rpm.