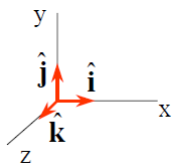
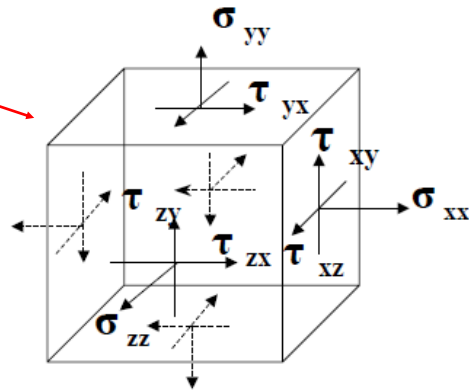


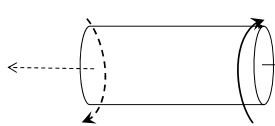
In un generico punto P del corpo si ha:



Tensore degli sforzi di Cauchy

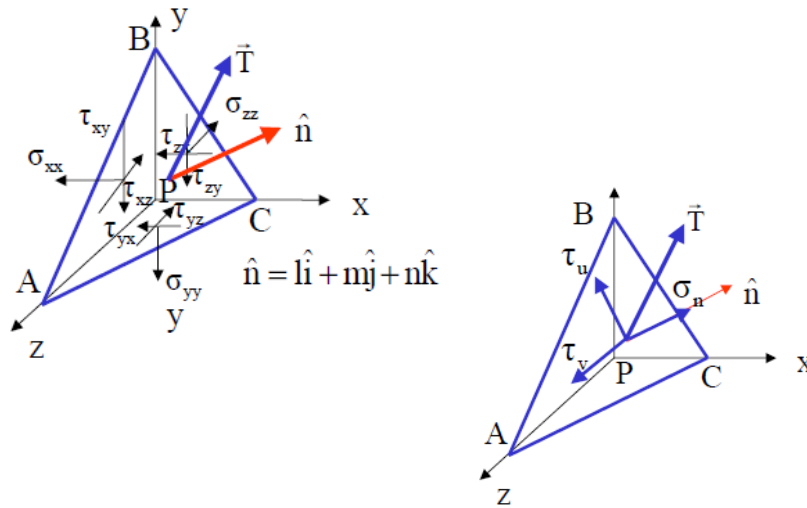
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Esempio:



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{16T}{\pi d^3}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix}$$

*l, m ed n* coseni direttori della retta normale al piano considerato

$$l = \cos\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\right); \quad m = \cos\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}\right); \quad n = \cos\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}\right);$$



Esiste una rotazione di assi per la quale gli sforzi di taglio sono nulli.

Questa configurazione è quella degli sforzi principali:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Per  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  >> tensore idrostatico

5



Si vuole quindi trovare il piano tale che:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6



L'equazione precedente è una equazione omogenea che ammette soluzione solo se il suo determinante è pari a zero (problema agli autovalori) :

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_{xx} \tau_{yz}^2 - \sigma_{yy} \tau_{zx}^2 - \sigma_{zz} \tau_{xy}^2$$



Si ottengono quindi 3 radici reali e distinte ognuna delle quali rappresenta lo sforzo in una direzione principale

I coseni direttori definiscono le tre direzioni principali

I coseni direttori si ottengono sostituendo gli sforzi principali nell'equazione omogenea



ALTRO METODO:

$$[\sigma] = [\sigma_h] + [\sigma_D] \quad [\sigma_D] = [\sigma] - [\sigma_h]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_h & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_h & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_h \end{bmatrix}$$

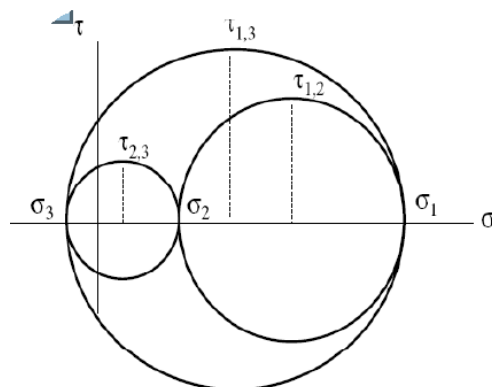
$$\text{con} \quad \sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

In questo caso il primo invariante è nullo ed il calcolo si semplifica

9



Altro Metodo: CERCHI DI MOHR



$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

10



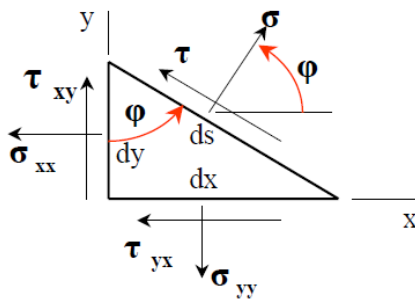
## Stato di sforzo



Nel caso si conosca già una direzione principale per individuare gli sforzi e le direzioni principali possono anche essere usati i cerchi di Mohr

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$



$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

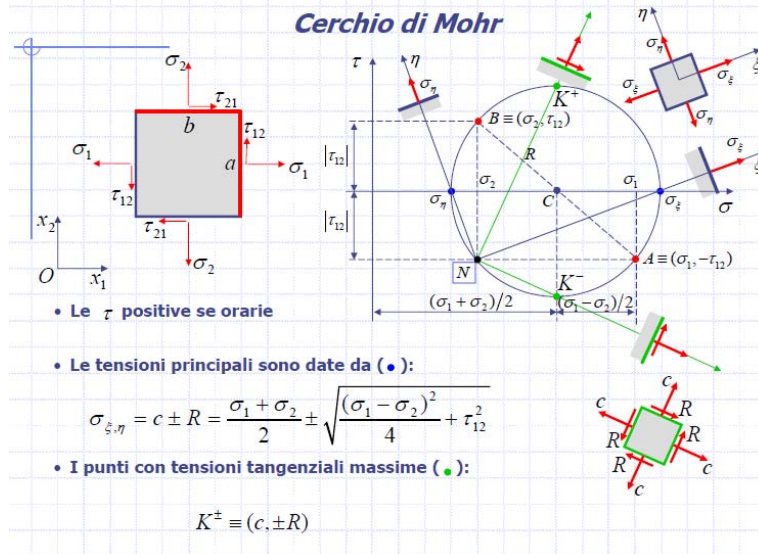
11



## Stato di sforzo



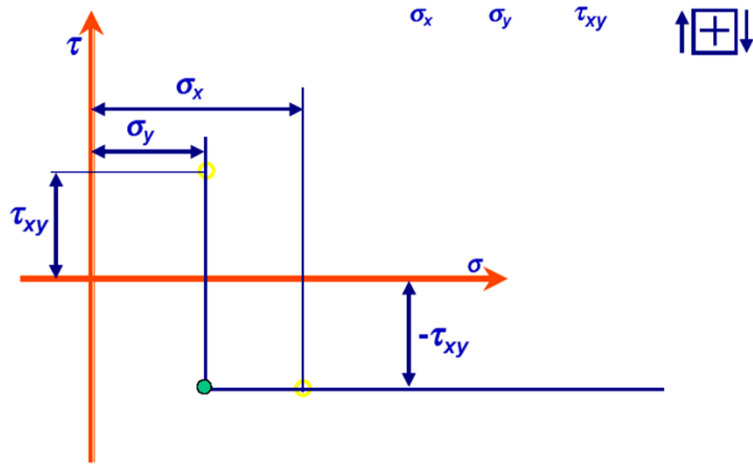
### Cerchio di Mohr



12



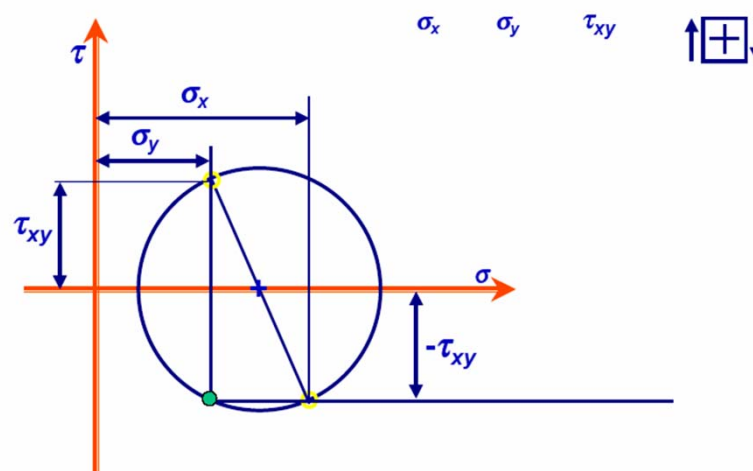
Stato di sforzo



13



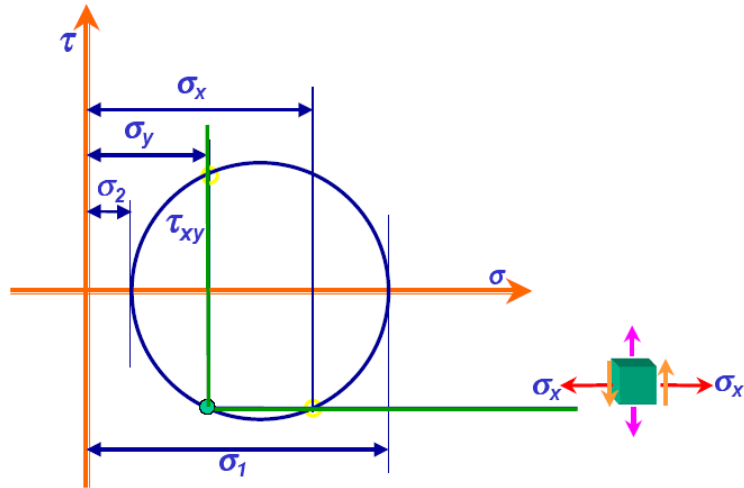
Stato di sforzo



14



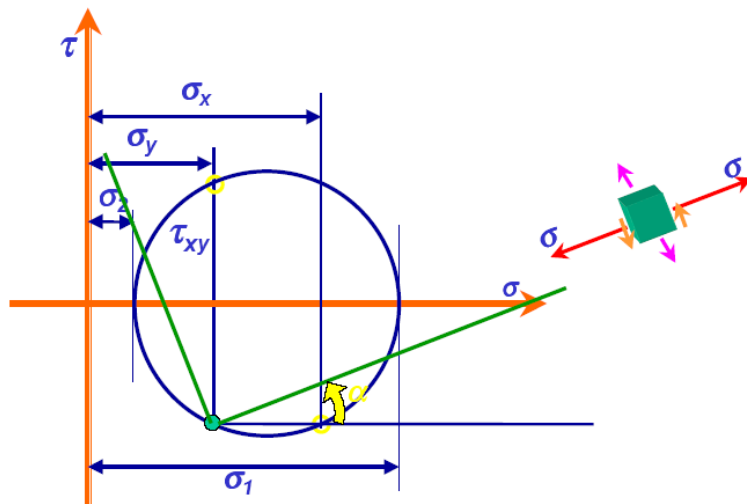
Stato di sforzo



15



Stato di sforzo



16

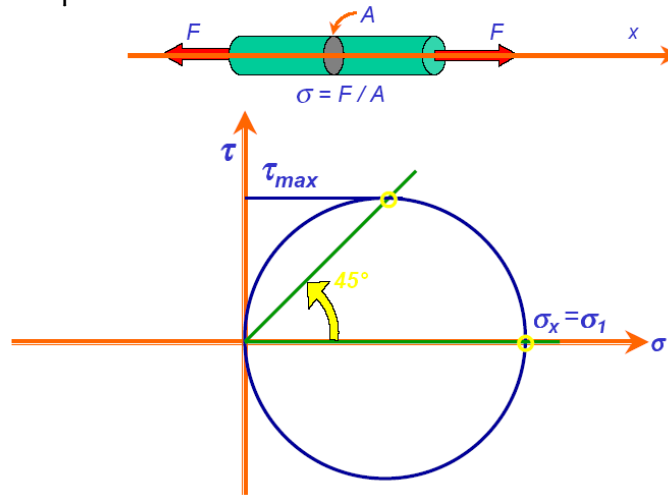




### Cerchi di Mohr



Trazione pura



17

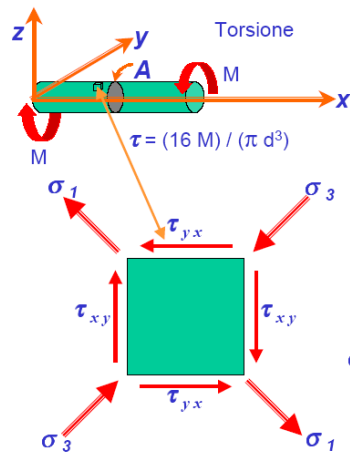


### Cerchi di Mohr



#### Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico



Nel caso di torsione pura, con la disposizione degli assi scelta, si ha:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} \neq 0$$

L'equazione cubica dello stato di tensione assume quindi la seguente forma:  
(si veda anche il cerchio di Mohr nel caso di torsione pura)

$$\sigma^3 - \sigma \tau_{xy}^2 = 0$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_1 = \tau_{xy}$$

$$\sigma_2 = 0$$

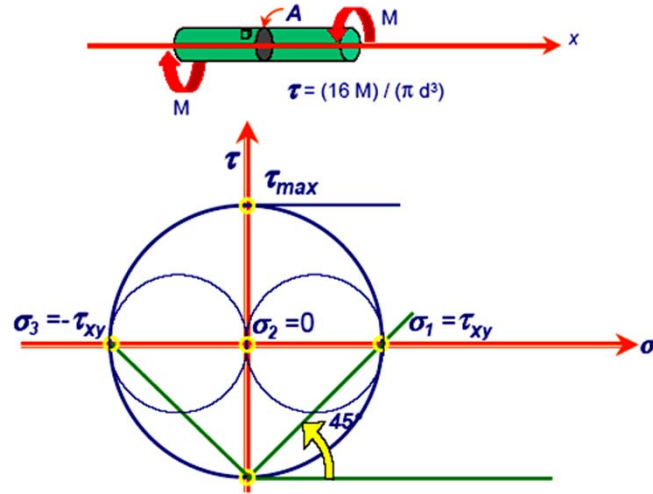
$$\sigma_3 = -\tau_{xy}$$

$$\sigma_3 = -\sigma_1$$

18



### Cerchi di Mohr



19

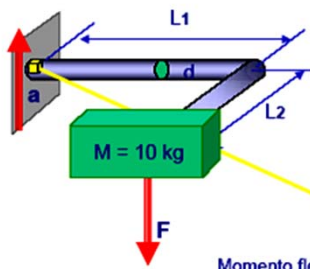


### Cerchi di Mohr



#### Esempio di calcolo

Il supporto rappresentato nello schizzo è costituito da una barra in alluminio a sezione circolare retta. Si vuol calcolare il diametro in base alla seguente specifica:



Specifica:  $L_1 = 0.5\text{m}$      $L_2 = 0.5\text{m}$   
 $M = 10\text{ kg}$   
 $a = 4g \cong 40\text{ m/s}^2$

Tensione ammissibile     $\tau_{\text{max}} = 50\text{ MPa}$

$F = M \cdot a = 40 \cdot 10 = 400\text{ N}$

$d?$

Nella sezione d'incastro si ha:

Momento flettente     $M_f = F \cdot L_1$      $\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi d^3} = \frac{32FL_1}{\pi d^3}$

Momento torcente     $M_t = F \cdot L_2$      $\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16FL_2}{\pi d^3}$

Le tensioni principali sono calcolate dall'equazione:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{dove } \sigma_x = \sigma_f \text{ e } \sigma_y = 0$$

20

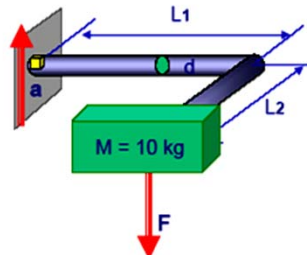


## Cerchi di Mohr



### Esempio di calcolo

Il supporto rappresentato nello schizzo è costituito da una barra in alluminio a sezione circolare retta. Si vuol calcolare il diametro in base alla seguente specifica:



Specifica:  $L_1 = 0.5\text{m}$      $L_2 = 0.5\text{m}$   
 $M = 10\text{ kg}$   
 $a = 4\text{g} \approx 40\text{ m/s}^2$

Tensione ammissibile     $\tau_{\max} = 50\text{ MPa}$   
 $F = M \cdot a = 40 \cdot 10 = 400\text{ N}$

$$\sigma_f = \frac{32FL_1}{\pi d^3} \quad \tau = \frac{16FL_2}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{32FL_1}{2\pi d^3} \pm \sqrt{\left(\frac{32FL_1}{2\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16FL_2}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{16F}{\pi d^3} [L_1 \pm \sqrt{L_1^2 + L_2^2}]$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{16F}{2\pi d^3} (L_1 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} - L_1 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2}) = \frac{16F}{\pi d^3} (\sqrt{L_1^2 + L_2^2})$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16F}{\pi \tau_{\max}} (\sqrt{L_1^2 + L_2^2})} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400}{\pi \cdot 50E6} (\sqrt{0.5^2 + 0.5^2})} = 36.2\text{mm}$$

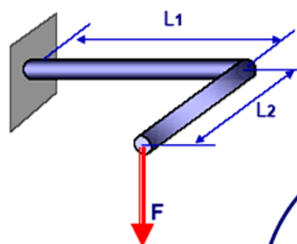
21



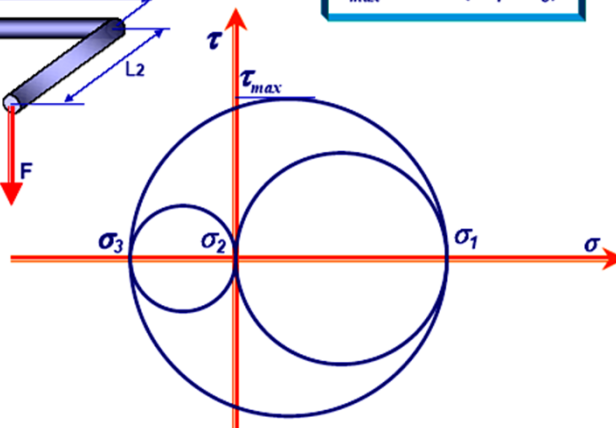
## Cerchi di Mohr



nel caso  $L_1 = L_2$



$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$



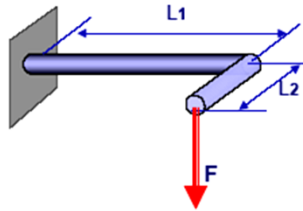
22



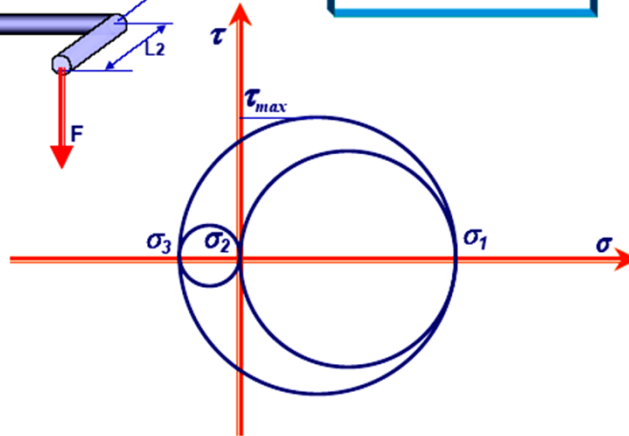
Cerchi di Mohr



nel caso  $L_1 > L_2$



$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$



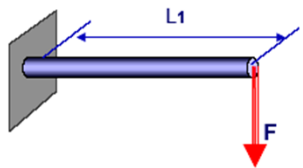
23



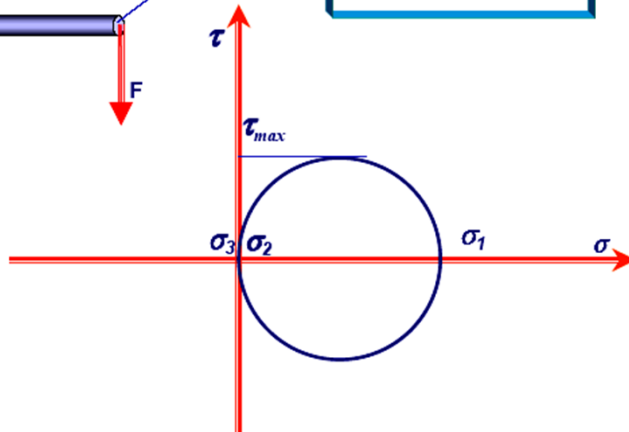
Cerchi di Mohr



nel caso  $L_2 = 0$



$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

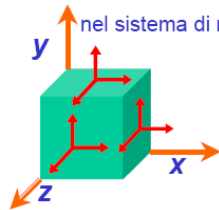


24



stato di tensione triassiale

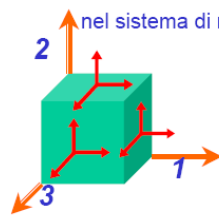
relazione costitutiva in campo elastico tra deformazione  $\epsilon$  e la tensione  $\sigma$ :



nel sistema di riferimento xyz  $\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



nel sistema di riferimento principale  $\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$



Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

Sollecitazione di taglio:

$$\gamma_{x,y} = \frac{\tau_{x,y}}{G} \quad \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} \quad \gamma_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2G} \quad \gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3$$

$$\gamma_{x,z} = \frac{\tau_{x,z}}{G} \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G} \quad \gamma_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2G} \quad \gamma_2 = \epsilon_1 - \epsilon_3$$

$$\gamma_{y,z} = \frac{\tau_{y,z}}{G} \quad \gamma_3 = \frac{\tau_3}{G} \quad \gamma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2G} \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$



Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

valida in campo elastico (per i materiali isotropi)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Le sottomatrici nulle indicano che non c'è accoppiamento tra componenti normali della tensione e distorsione