



**Problema:** in alcuni casi una trave può collassare a carichi più bassi di quello limite

Caso significativo in progettazione meccanica: componenti assimilabili a travi in compressione

In molti casi il collasso del componente avviene in maniera rapida e senza preavviso

1

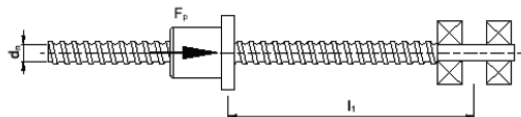


### Esempi

- Bielle
- Molle ad elica
- Viti di trasmissione

Per alcune combinazioni *configurazione geometrica-carico* si ha una violazione del principio generale secondo il quale spostamenti e rotazioni sono linearmente proporzionali con il carico

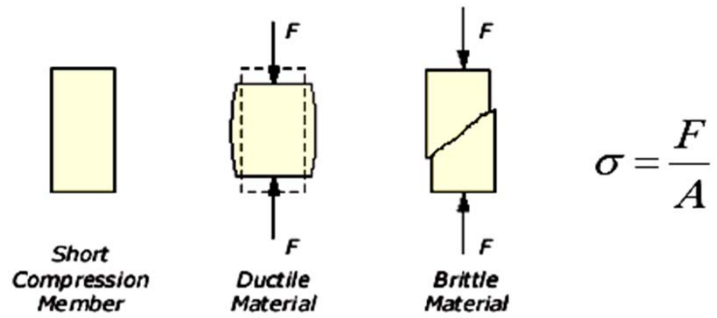
Per tali situazioni si parla di instabilità elastica



2

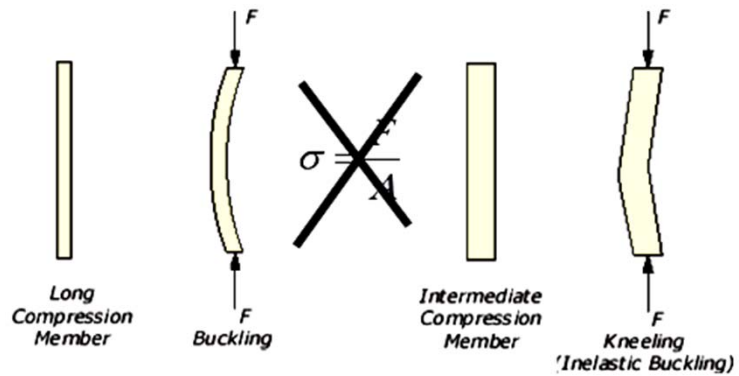


Trave in compressione



Trave in compressione

All'aumentare della lunghezza del componente, il ruolo della geometria e della rigidità diventa cruciale nell'assicurare la resistenza

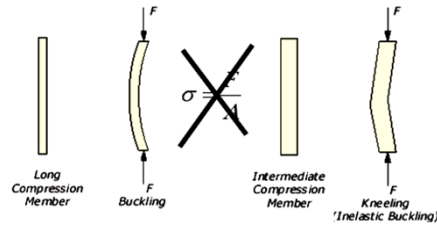




## Instabilità elastica



### Trave in compressione



Evidenze sperimentali hanno mostrato che per aste relativamente lunghe (snelle), si verifica il cosiddetto "buckling" (ingobbamento, imbozzamento) ossia un fenomeno di collasso, anche quando la sollecitazione è ben al di sotto del limite di resistenza del materiale

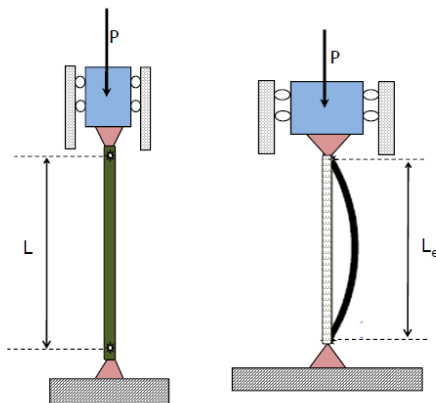
5



## Instabilità elastica



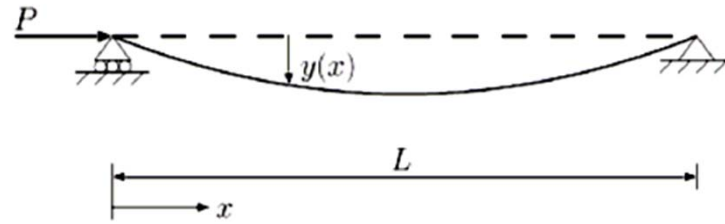
Il caso più semplice di elementi soggetti a carico di punta è quello dell'asta di Eulero:



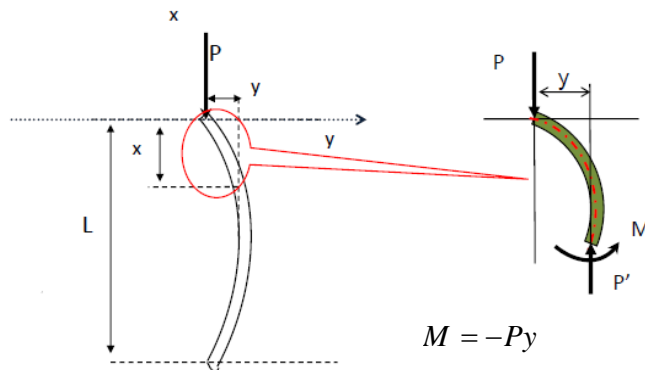
Condizioni iniziali:

trave perfettamente rettilinea  
sollecitata a compressione  
carico perfettamente assiale  
omogenea  
tensioni entro il limite elastico

6



Si definisce **carico critico** ( $P_{cr}$ ) quel carico limite oltre il quale se si verifica anche un minimo movimento dell'asta, o dei supporti o del carico, la struttura crolla .





## Instabilità elastica



$$M = -Py \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0 \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \leftarrow \text{Equazione differenziale del moto armonico}$$

Soluzione generale:

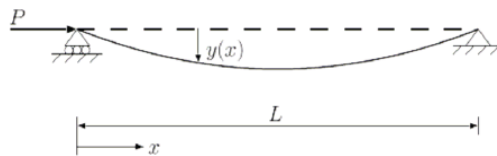
$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

che dipenderà dalle condizioni al contorno

9



## Instabilità elastica: condizioni al contorno



$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

$$B = 0 \qquad \omega L = 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$$

$$\omega^2 = \frac{P}{EI}$$

Quindi il carico critico sarà dato da:

$$P_{cr} = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} EI$$

10



### Instabilità elastica: carico unitario



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 EA\rho^2}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}$$

A = sezione trave e  $\rho$  = raggio di inerzia di A  $L/\rho$  = rapporto di snellezza

Ha le stesse dimensioni di una sollecitazione ma si tratta della resistenza di un'asta specifica non del materiale.

Raddoppiare la lunghezza ha un drastico effetto sul carico unitario ma non influenza in alcun modo la resistenza del materiale di cui è fatta l'asta.

Dipende solo dal modulo di elasticità e dalla snellezza e NON DAL CARICO DI SNERVAMENTO O DI ROTTURA DEL MATERIALE di cui è fatta l'asta.

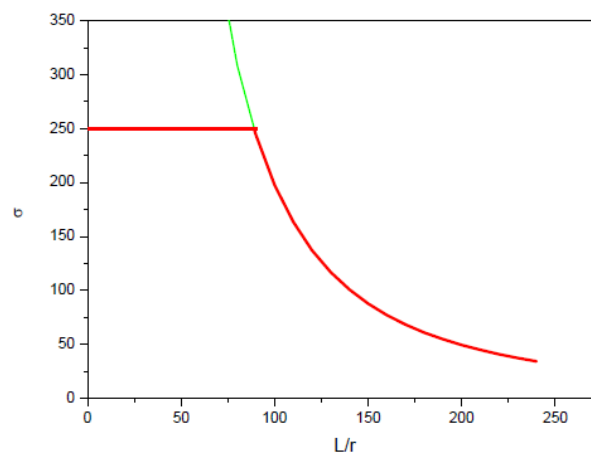
11



### Instabilità elastica: carico unitario



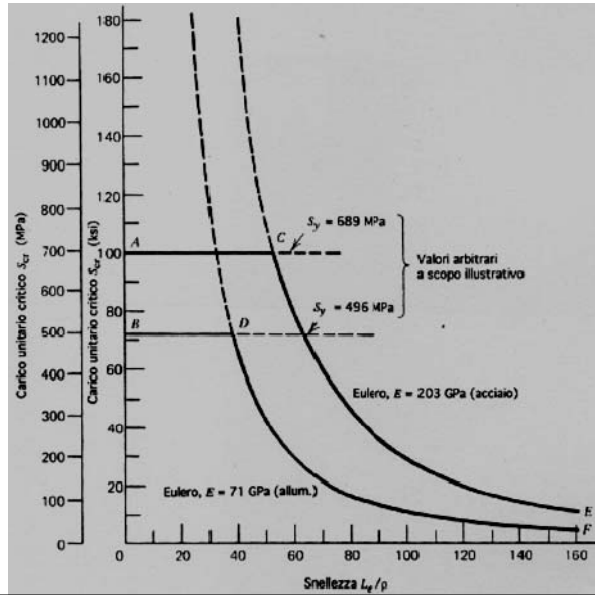
per un acciaio strutturale:  $\sigma_{snerv.} = 250 \text{ MPa}$   $E = 200 \text{ GPa}$



12



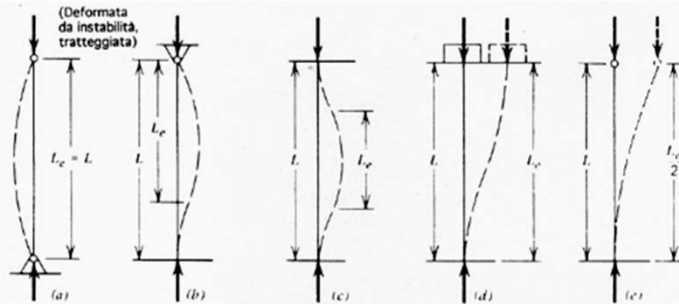
### Instabilità elastica: carico unitario



13



### Instabilità elastica: carico unitario



Teorico	$L_e = L$	$L_e = 0,707L$	$L_e = 0,5L$	$L_e = L$	$L_e = 2L$
Valore minimo raccomandato dall'AISC	$L_e = L$	$L_e = 0,80L$	$L_e = 0,65L$	$L_e = 1,2L$	$L_e = 2,1L$

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION

14



## Instabilità elastica: carico unitario



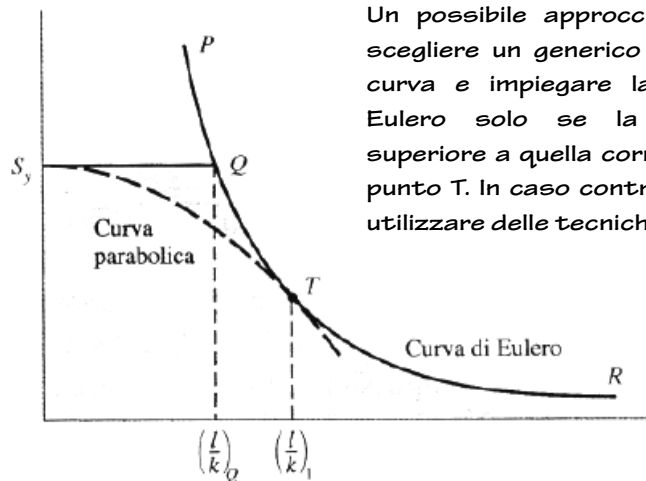
Nella progettazione di aste sottoposte a compressione, il progettista cercherà di fissare le estremità nel modo più opportuno per realizzare le condizioni di vincolo desiderate (utilizzando ad es. saldature, perni, bulloni ecc.)

Si è visto sperimentalmente che si possono verificare collassi (a causa di eccentricità del carico e deformazioni localizzate) anche sotto la curva di Eulero in prossimità del punto di intersezione con la retta di snervamento, perciò tale motivo, quando la snellezza è prossima a valori vicini al punto di intersezione suddetto, non si dovrebbe impiegare né la curva di Eulero né il metodo di compressione semplice

15



## Instabilità elastica: carico unitario



Un possibile approccio è quello di scegliere un generico punto T sulla curva e impiegare la relazione di Eulero solo se la snellezza è superiore a quella corrispondente al punto T. In caso contrario si devono utilizzare delle tecniche alternative

16





## Instabilità elastica: formula di Johnson



Per tenere conto delle evidenze sperimentali (che riportavano collassi anche per combinazioni 'carico critico-snellezza' teoricamente sicure, sono state proposte alcune modifiche empiriche alla relazione di Eulero. Una delle più utilizzate è la cosiddetta formula parabolica proposta da J.B. Johnson

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi E} \left( \frac{L_e}{\rho} \right)$$

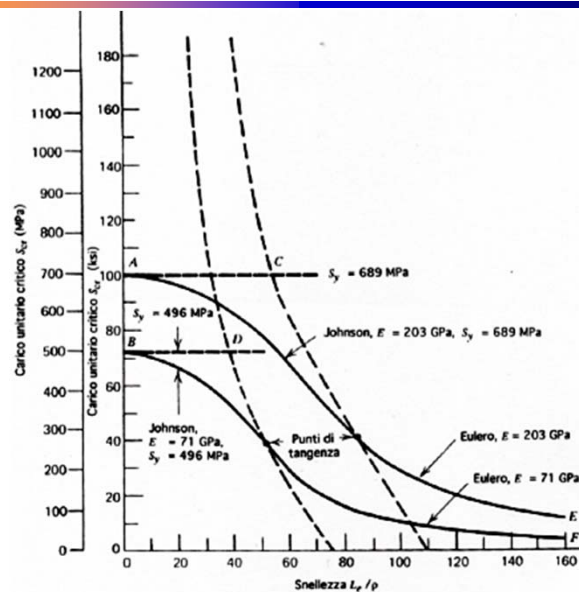
Punto di tangenza tra parabola e curva di Eulero:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_y}{2} \quad \left( \frac{L_e}{\rho} \right) = \sqrt{\left( \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} \right)}$$

17



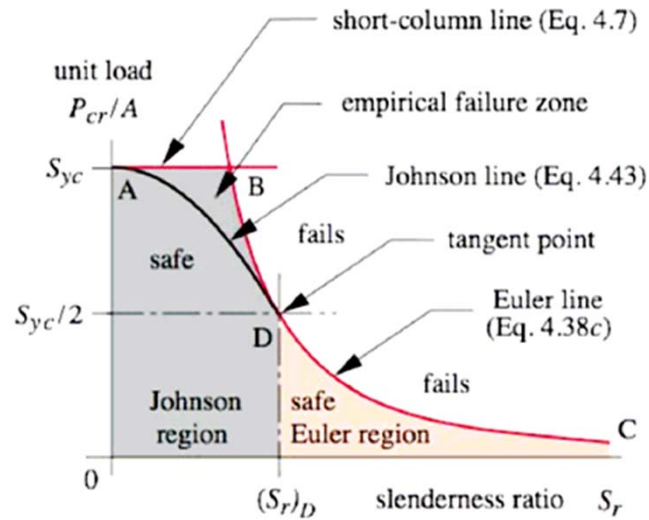
## Instabilità elastica: formula di Johnson



18



### Instabilità elastica: formula di Johnson



19



### Instabilità elastica: formula di Johnson



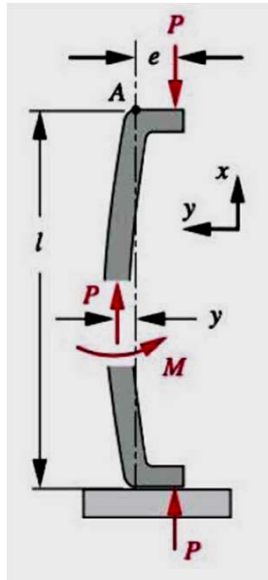
A volte i coefficienti della parabola di Johnson vengono variati per trovare un migliore accordo con i dati sperimentali

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \underbrace{\sigma_y}_a - \underbrace{\frac{\sigma_y^2}{4\pi E}}_b \left( \frac{L_e}{\rho} \right)$$

20



### Instabilità elastica: carico eccentrico



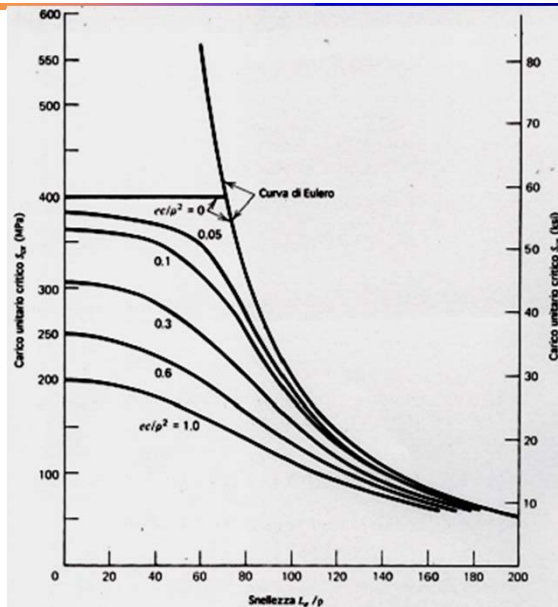
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\sigma_y}{1 + \left(\frac{ec}{\rho^2}\right) \sec \left[ \left(\frac{L_e}{\rho}\right) \sqrt{\frac{P_{cr}}{4AE}} \right]}$$

$c$  rappresenta la distanza della fibra più esterna dall'asse neutro di flessione e il rapporto  $ec/\rho^2$  è noto come fattore di eccentricità

21



### Instabilità elastica: carico eccentrico



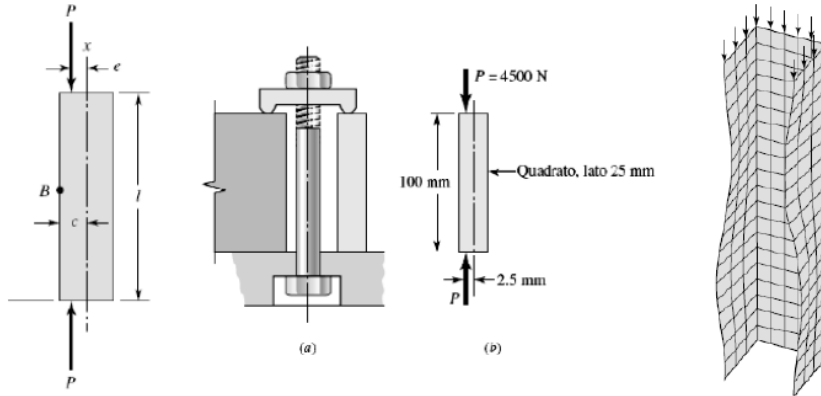
22



## Instabilità elastica: carico eccentrico



### Esempi



Shigley - Progetto e costruzione di macchine 2/ed  
Richard G. Budynas, J. Keith Nisbett

Copyright © 2009 - The McGraw-Hill Companies